4.3.2 Goniometrické rovnice II

Předpoklady: 040201

Pedagogická poznámka: Hodina je rozdělena na dvě poloviny. Před příkladem 5 přibližně v polovině hodiny přeruším práci a synchronizuji třídu.

Př. 1: Vyřeš rovnici $1-(\sin x-1)=2-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\sin x-1\right)$.

Problém: $\sin x$ se nachází uvnitř složitějších výrazů, neznáme jeho hodnotu $\Rightarrow$ substituce, aby $\sin x$ z rovnice dočasně zmizelo.

Substituce: $y=\sin x$.

$$1-(y-1)=2-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cdot y-1\right)$$

$$2-y=2-3y+\sqrt{3}$$

$$2y=\sqrt{3}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Základní řešení : $\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi$, funkce $y=\sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Pedagogická poznámka: Poměrně často se objevuje špatný pokus o substituci $y=\sin x-1$, který pramení z problémů s prioritami operací. Je třeba jim vysvětlit, že pravá strana výraz $y=\sin x-1$ vůbec neobsahuje, protože díky přednosti násobení před odčítáním se jednička odečítá od výrazu $\sqrt{3}\sin x$.

Př. 2: Vyřeš rovnici $\dfrac{\cos x+\cos\pi}{\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\cos x}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1$.

Problém: V rovnici se vyskytují hodnoty goniometrických funkcí neobsahujících x $\Rightarrow$ dosadíme za ně hodnoty:

$$\frac{\cos x+(-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x}=1+1.$$

$$\frac{\cos x-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x}=2$$

Problém: V rovnici je $\cos x$ víckrát $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y = \cos x$.

$$\frac{y-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)y} = 2 \quad /\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y \qquad \text{podmínka: } y \neq 0$$

$$y-1=-y$$

$$2y=1$$

$$y=\frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Pedagogická poznámka: U žáků, kterým výrazy $\cos\pi$ zabrání vyřešit příklad, je třeba znovu připomenout, že výrazy $\cos\pi; \sin\frac{\pi}{2}; \ldots$ jsou obyčejná čísla (trochu nepřehledněji zapsaná, ale pořád jde o známé hodnoty), pracuje je se s nimi jako s čísly a na čísla jdou většinou i snadno přepsat.

Př. 3: Vyřeš rovnici $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$.

Problém: V rovnici se vyskytují hodnoty goniometrických funkcí v druhé mocnině. $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=\sin x$

$$2y^2+3y-2=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm5}{4}$$

$$y_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2} \qquad y_2=\frac{-3-5}{4}=-2$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1=\sin x_1=\frac{1}{2} \qquad y_2=\sin x_2=-2$$

$$K_1=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\} \qquad K_2=\emptyset$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Pedagogická poznámka: Občas se objeví problémy se substitucí, které spočívají v tom, že na druhou není *x*, ale sinus. Samotný zápis sin však nepředstavuje žádnou hodnotu, jde pouze o označení postupu, kterým nějakého čísla (v tomto případě *x*) získáme jiné číslo (jde o to samé, jako bychom se snažili interpretovat, jako číslo zápis $|\ \ |+1$ nebo $3\cdot(\ \ )^2$). Zápis $\sin^2 x$ proto znamená to samé, jako zápis $(\sin x)^2$, jde pouze z vynechání závorek a zkrácení zápisu.

Př. 4: Vyřeš rovnici $2\cos x(2\cos x+1)=2\cos x+3$.

Problém: V rovnici se po úpravě vyskytnou hodnoty goniometrických funkcí v druhé mocnině $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=\cos x$

$$2y(2y+1)=2y+3$$
$$4y^2+2y=2y+3$$
$$4y^2-3=0$$
$$\left(2y-\sqrt{3}\right)\left(2y+\sqrt{3}\right)=0$$

$$y_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1=\cos x_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y_2=\cos x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K_1=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{11}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\} \qquad K_2=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{11}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\operatorname{tg} 2x=-1$.

Problém: Uvnitř tangens není pouze *x*, ale složitější výraz $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=2x$

$$\operatorname{tg} y=-1$$
$$y=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=2x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$$
$$2x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi \qquad /:2$$
$$x=\frac{3}{8}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3}{8}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Objevu je návrh na vydělení rovnice dvěma a úpravu $\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}=\frac{\operatorname{tg} \cancel{2}x}{\cancel{2}}=\operatorname{tg} x$. Takovém případě není od věci vyzkoušet na kalkulačce pro libovolné *x*, zda platí $\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} = \operatorname{tg} x$ (například pro tabulkový úhel $\frac{\pi}{6}$ dostáváme:

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} = \frac{\operatorname{tg} 2\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ získali jsme různá čísla $\Rightarrow$ rovnost $\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} = \operatorname{tg} x$ neplatí a nemůžeme ji používat při úpravách rovnice

Pedagogická poznámka: Vždy se najde někdo, kdo potřebuje připomenout, že nejmenší perioda tangens je rovna π a tangens je uvnitř své periody prostou funkcí. Připomínám studentům, že periodu výsledků je třeba dopsat hned na počátku substituce, než začneme výraz upravovat. Přesto se najde dost jednotlivců, kteří to v následujících příkladech neudělají a budou mít špatné výsledky.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\cos 0,5x = \frac{1}{2}$.

Problém: Uvnitř cosinu není pouze *x*, ale složitější výraz.

Substituce: $y = 0,5x$

$\cos y = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ $\qquad$ $y_2 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 0,5x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$0,5x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad / \cdot 2$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$

$y_2 = 0,5x_1 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$0,5x_2 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \qquad / \cdot 2$

$x_2 = \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

$K_2 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi ; \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problém: Uvnitř sinu není pouze *x*, ale složitější výraz.

Substituce: $y = 3x - \frac{\pi}{2}$

$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ $\qquad$ $y_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ $\qquad$ $y_2 = 3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{2}$

$3x_1 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 3$ $\qquad$ $3x_2 = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 3$

$x_1 = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ $\qquad$ $x_2 = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$ $\qquad$ $K_2 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi ; \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 1$.

Problém: Uvnitř sinů není pouze *x*, ale složitější výraz, bohužel výrazy se liší znaménkem.

Nápad: $y = \sin x$ je lichá funkce $\Rightarrow$ $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sin\left[-\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Substituce: $y = 2x - \frac{\pi}{3}$

$\sin y = -\sin y + 1$

$2\sin y = 1$

$\sin y = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ $\qquad$ $y_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 2x_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ $\qquad$ $y_2 = 2x_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $2x_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad / + \frac{\pi}{3}$

$2x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad / : 2$ $\qquad$ $2x_2 = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 2$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ $\qquad$ $x_2 = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \right\}$ $\qquad$ $K_2 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \right\}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi ; \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \right\}$$

Př. 9: Petáková:
strana 52, cvičení 3 b), d)
strana 52, cvičení 7 b)
strana 52, cvičení 6 b), d), h), i)

Shrnutí: Substituci používáme při řešení goniometrických rovnic na zjednodušení rovnice i zjednodušení výrazů uvnitř funkcí.